**Óravázlat**

A sorbanállási problémák tartalma lényegileg az, hogy bizonyos kiszolgálást, ellátást végző, ún. kiszolgáló berendezéshez (egység, állomás, csatorna) ún. kiszolgáló egyedek (igények) érkeznek, melyeket valamilyen értelemben az állomás "kiszolgál". Ez leggyakrabban az érkezés sorrendjében történik. Ezt a szabályt szigorú prioritási elvnek nevezzük.

Hogy sorbanállás keletkezzék, ahhoz elegendő, hogy a befutások és/vagy a kiszolgálások időtartama szabálytalan legyen. Sorbanállás jelentkezhet akkor is, ha a kiszolgálás időtartama állandó, de nagyobb, mint a beérkezések közti állandó időtartam. Ebben az esetben a várakozók sora szabályosan és vég nélkül növekszik. Az ilyen eset azonban kevésbé érdekes és a továbbiakban nem foglalkozunk vele.

A beérkezések közti időközök lehetnek:

a) egyenlőek;

b) egyenlőtlenek, de meghatározottak;

c) egyenlőtlenek és csak valószínűségüket ismerjük; ilyenkor azt mondjuk, hogy az időköz valószínűségi változó.

A kiszolgálási időtartama lehet:

a) állandó;

b) változó, de meghatározott;

c) valószínűségi változó (tehát valószínűségeloszlás alapján ismert).

Magától értetődik, hogy az egymás után következő beérkezések közti időközök és/vagy a kiszolgálás időtartama lehet szabálytalan, és még valószínűségeloszlásukat sem ismerjük. Ebben az esetben semmiféle előrelátásról sem beszélhetünk.

Az egy kiszolgáló állomáshoz érkező kiszolgálandó igények érkezési időpontjai általában a véletlentől függnek. Véletlentől függ ekkor bármely időpontban a kiszolgáló állomáshoz érkező igények száma is, tehát valószínűségi változó. Ennek eloszlását kísérletek, megfigyelések alapján közelíthetjük, határozhatjuk meg.

A kiszolgáló állomáshoz ún. **várakozási helyek** (várakozó csatornák) is tartozhatnak, ahol a kiszolgáló csatorna foglaltsága esetén a beérkező egyedek várakoznak a kiszolgálásra. Egy ilyen rendszert sorbanállási rendszernek nevezünk. Ezt a terminológiát használjuk akkor is, ha a rendszerben a kiszolgálás időtartama is a véletlentől függ, tehát ez is valószínűségi változó. Véletlentől függ ezért a rendszerből való távozás, kilépés időpontja is (feltevésünk szerint a kilépés a kiszolgálás befejezésekor azonnal megtörténik), melyet a kiszolgálás időtartamán kívül a beérkezések folyamata is befolyásol.

A várakozási helyen tartózkodó, kiszolgálásra váró egyedek összességét **várakozó** **sor**nak nevezzük.

A várakozó sorok kezelését illetően egy sorbanállási rendszer lehet:

a) **Elvesztéses** (vagy visszautasításos), ha a kiszolgáló állomás(ok) foglaltsága esetén a beérkező egyed azonnal távozik, nem várakozik. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az igény elvész.

b) **Tiszta várakozásos** (vagy korlátlan várakozásos), ha a kiszolgáló állomás foglaltsága esetén az igény nem vész el, vagyis ha a beérkező egyed addig várakozik, amíg ki nem szolgálják.

c) **Kombinált várakozásos** (vagy korlátozott várakozásos), ha a várakozó helyek száma korlátozott. Ilyenkor a kiszolgáló állomás foglaltsága esetén, ha minden várakozó hely is foglalt, a beérkező igény elvész (távozik) anélkül, hogy kiszolgálnák.

A sorbanállási rendszerek egy másik fontos osztályozási szempontja, hogy a rendszerbe érkező egyedek forrása, ahonnan az egyedek érkeznek, korlátozott-e vagy korlátlan. Ennek megfelelően beszélünk **korlátos**, illetve **korlátlan forrású** **sorbanállási rendszerekről**. Egy m számú alkatrésszel működő gép korlátos forrású sorbanállási rendszert jelent, hiszen *m* db alkatrésze közül legfeljebb *m* hibásodhat meg egyszerre valamely időpontban. Egy pályaudvar jegypénztárához érkezők viszont, elvben, korlátlan forrású sorbanállási rendszert alkotnak.

Az említett mutatók meghatározása, illetve a sorbanállási problémák kezelése a valószínűségszámítás segítségével történik. Egy sorbanállási rendszerben a beérkezések folyamata általában valamilyen **sztochasztikus folyamat**szerint történik, amelyek elmélete csak a Markov-folyamatok, a differencia-, és differenciál-egyenletrendszerek elméletének ismeretével sajátítható el. Emiatt a sorbanállási modellek közül csupán egy egyszerű esetet mutatunk be, amelyben az alapvető feltételek az alábbiak.

1. Annak valószínűsége, hogy *t* idő alatt *k* egység érkezik a rendszerbe, független a t időintervallum kezdetétől, csupán *t* nagyságától függ (**stacioner folyamat**).

2. Annak valószínűsége, hogy kis *t* intervallumban egy egység érkezik a rendszerbe,  *t*, ahol az időegységenkénti érkezések átlagos száma (**beérkezési ráta**).

3. Annak a valószínűsége, hogy kis *t* idő alatt egynél több egység érkezik a rendszerbe, *t*-hez képest kicsi. Például egy időben két gépkocsi nem érkezik a benzinkúthoz. (Ezt **ritkasági** **feltétel**nek nevezzük.)

4. Egy egység kiszolgálásának időtartamai az egyes csatornákban exponenciális eloszlású, független valószínűségei változó  várható értékkel, ahol a kiszolgálási ráta, és az adott időben kiszolgált egységek számát jelöli.

Jelölések: - *pn* (*t*) annak a valószínűségét, hogy *t* időpontban *n* egység tartózkodik a rendszerben,

- S a kiszolgáló csatornák számát,

- *v* a sorbanállók számát,

- M(*n*) a rendszerben lévő egységek számának várható értékét,

- a **forgalom intenzitását** ( feltételezhetjük, hogy S, egyébként a sor minden határon túl növekedik),

- *t*s az átlagos sorbanállási idő a kiszolgálás előtt,

- *t*r a rendszerben eltöltött átlagos várakozási idő, (beleértve a kiszolgálási időt is).

A rendszerben tartózkodó egységek számának várható értéke és a rendszerben eltöltött átlagos várakozási idő várható értéke közötti összefüggést adja meg az

összefüggés, amelyet tapasztalati szabályként már sok éve ismertek, és amelyre először John D. C. Little adott egzakt bizonyítást 1961-ben. Ezért is szokták **Little-formulá**nak nevezni.

Megjegyzés: A legtöbb elemi sorbanállási modellben feltételezzük, hogy az ügyfeleknek a rendszerbe való érkezése (új igény "születése"), illetve a rendszerből való távozása (az igény "elhalálozása") az ún. **születési-halálozási folyamat** szerint történik. Azt mondhatjuk, hogy az egyéni születések és elhalálozások véletlenszerűen következnek be, és ezek átlagos gyakorisága a rendszer pillanatnyi állapotától függ.

A rendszer bármely *n* állapotában (*n* = 0, 1, 2, ... ) a bemenő események átlagos gyakorisága (az időegységre eső események várható száma) egyenlő a kimenő események átlagos gyakoriságával. Ezt nevezzük a **bemenő és kimenő** **gyakoriság egyenlősége** **elvének**. Azt az egyenletet, amely ezt az elvet kifejezi, az *n* állapotra vonatkozó mérlegegyenletnek nevezzük. Miután felállítottuk ezeket a mérlegegyenleteket minden állapotra az ismeretlen *pn*(*t)* valószínűségekkel, megoldhatjuk az egyenleteket, hogy ezeket a valószínűségeket meghatározzuk.

Az alábbiakban megadjuk az egycsatornás sorbanállási rendszerre vonatkozó, a legfontosabb kérdéseket megválaszoló összefüggéseket, melyek segítségével konkrét feladatokat tudunk majd megoldani.

Annak a valószínűsége, hogy egy tetszőleges időpontban a rendszerben nem tartózkodik kliens:

Annak a valószínűsége, hogy egy tetszőleges időpontban a rendszerben pontosan *n* kliens tartózkodik egyszerre:

.

A rendszerben adott időpontban tartózkodó egyedek számának várható értéke:

.

A rendszerben tetszőleges időpontban sorukra várók számának várható értéke:

.

Megjegyzés: a Little-formula alkalmazható a sorbanállók számának a várható értéke és a sorbanállással eltöltött idő hosszának várható értéke összekapcsolására is, azaz:

.

Ezekkel a képletekkel és összefüggésekkel most már tudjuk vizsgálni az egycsatornás sorbanállási rendszerek működését. Szükséges feltétel, hogy a forgalom intenzitása legyen 1-nél kisebb, mert ellenkező esetben képleteink nem érvényesek (a várakozó sor meg végtelenül növekszik).

1. Példa

Egy hivatal egyik irodahelyiségében, ahol a munkanapokon 10 órán át fogadnak ügyfeleket, 60 személy fordul meg naponta. Az itt dolgozó ügyintéző óránként 8 személyt képes meghallgatni. Tegyük fel, hogy a beérkezések megfelelnek a Poisson-folyamat jellegzetességeinek, a kiszolgálás (az ügyintézés) ideje pedig exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

a) Mi a valószínűsége, hogy a sorban kettőnél több személy várakozik?

b) Mekkora lesz a várakozó sor várható hossza?

c) Mennyi a várható sorbanállási idő?

Megjegyzés: és értékének meghatározása történjék egy órára vonatkozóan. Ha tehát az egységül választott időtartam egy óra, akkor = 6, = 8; és ebből = a forgalom intenzitása.

**Megoldás**

a)

Annak a valószínűsége, hogy kettő vagy annál kevesebb egység található a rendszerben:

P(*n* 2) = = .

Tehát annak a valószínűsége, hogy kettőnél többen legyenek a rendszerben:

P(*n* 2) = 1 - P(*n* 2) = 1 - (1 – ψ3) = ψ3 = .

b) A rendszerben található egységek várható száma:

.

A várakozó egységek várható száma pedig

.

c) A sorbanállás várható ideje:

óra, azaz 22,5 perc.

2. Példa

Az RS Cég egy nagy raktárral rendelkezik Dél-Kaliforniában árukészletének tárolásához, ahonnan a térség számos bútorüzletébe szállít árut. Egyetlen, négytagú személyzettel lehet kirakodni és / vagy berakodni minden olyan teherautót, amely a raktár rakodóhelyére érkezik.

A menedzsment csökkenti szeretné a cég költségeit, ezért döntést kell hozni a legénység jövőbeli méretéről. A teherautók Poisson-folyamat szerint érkeznek a rakodóállomáshoz átlagosan 1 óránként.

A személyzet által a teherautó ki- és / vagy berakodásához szükséges idő exponenciális eloszlású (a személyzet méretétől függetlenül). Egy teherautónak a négytagú személyzettel végzett rakodása átlagosan 15 perc. Ha a rakodók számát csökkentenék, az becslések szerint az átlagos rakodási időt (jelenleg μ = 4 ügyfél óránként) arányosan növelné.

A rakodók mindegyike 20 dolláros órabért kap. A rakodóállomáshoz érkező, ki/be rakodására várakozó tehergépkocsinak tétlenségből fakadó becsült összege óránként 30 dollár.

a) Számítsuk ki a különböző teljesítménymutatókat [M(v), M(n), M(ts), M(tr)] erre a sorbanállási rendszerre arra az esetre, amikor a személyzetnek négy tagja van.

b) Ismételjük meg az a) pontbéli számításokat három fős rakodó személyzetre.

c) Ismételjük meg az előző számításokat kétfős személyzetre.

d) Figyelembe véve a korábbi eredményeket, hány fős csapat alkalmazását javasolnánk a menedzsmentnek? [Határozzuk meg, mely rakodói csapatlétszám minimalizálja a várt óránkénti összköltséget.]

**Megoldás**

A beérkezési ráta: λ = 1 óránként.

1. A kiszolgálási ráta: μ = 4 óránként (60/15 = 4). A forgalom intenzitása: ψ =1/4.
2. A kiszolgálási ráta: μ = 3 óránként (60/20 = 3). A forgalom intenzitása: ψ =1/3.
3. A kiszolgálási ráta: μ = 2 óránként (60/30 = 2). A forgalom intenzitása: ψ =1/2.
4. A várt óránkénti összköltség a következőképpen alakul a 3 különböző esetben:

n = 4 fős csapatnál az összköltség ,

n = 3 fős csapatnál az összköltség ,

n = 2 fős csapatnál az összköltség ,

azaz a 2 fős csapat alkalmazása a leggazdaságosabb.

3. Példa

Egy hírlapárusnál egy vásárló kiszolgálásának átlagos időtartama 25 másodperc. Ennél a standnál általában 60-an szoktak vásárolni óránként.

1. Mennyi egy vásárló várakozási idejének várható hossza?
2. Mennyivel növekszik a várakozási idő várható hossza, ha a kiszolgálási átlagos időtartam 50 másodpercre módosul?

**Megoldás**

1. λ = 60 / ó, μ = 3600/25 = 144 /ó, ψ = 60/144 = 5/12 < 1
2. λ = 60 / ó, μ = 3600/50 = 72 /ó, ψ = 60/72 = 5/6 < 1

Az átlagos várakozási időtartam 232 másodperccel növekszik.

Tehát, míg a kiszolgálási időtartam kétszeresére nőtt, a sorban való várakozás átlagos ideje majdnem 14-szeresére növekedett, ami rávilágít a sorbanállási rendszerek helyes megtervezésének fontosságára.

